Théorème de Fubini pour les séries doubles de réels positifs

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}}$ une suite double de réels.

On suppose	Alors
(1) $\forall (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ /\ a_{i,j}\geqslant 0$ (2) $\forall i\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ converge (3) la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ converge On note $S=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$	(i) $\forall j\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ converge (ii) la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ converge (iii) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$

a/ Pour tous naturels n et m , on note $S_{n,m}=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}\right)$

par (2), $S_{n,m}=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}\right)$ est la somme (sur n) des sommes partielles de rang m des séries convergentes $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}$

Donc $\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{n,m}\right)$ existe et vaut $\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}\right)\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$

par (3), le membre de droite de l'égalité précédente a une limite quand $n\to\infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{n,m}\right)\right)$ existe et est égale à $S=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$

Par commutativité et associativité (sommes finies), il est clair que $S_{n,m}=\sum\limits_{j=0}^{m}\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,j}\right)$

Il faut donc montrer que $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{n,m}\right)\right)$ existe et est égale à $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{n,m}\right)\right)$

b/ Par (1) et (2), pour tout $j\in\mathbb{N}$, $a_{i,j}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{i,k}$.

Donc la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ (à termes positifs) est majorée par la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ qui converge par (2) ,

et cette série converge (i) .

c/ Pour tout naturel m , $\sum\limits_{j=0}^{m}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}\right)$ (somme de $m+1$ séries convergentes).

Or par (1) et (2) $\forall m\in\mathbb{N}/\sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}\leqslant\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$, donc $\forall m\in\mathbb{N}/\sum\limits_{j=0}^{m}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)\leqslant\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)=S$

Les sommes partielles de la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ sont majorées par S. Donc cette série converge (ii).

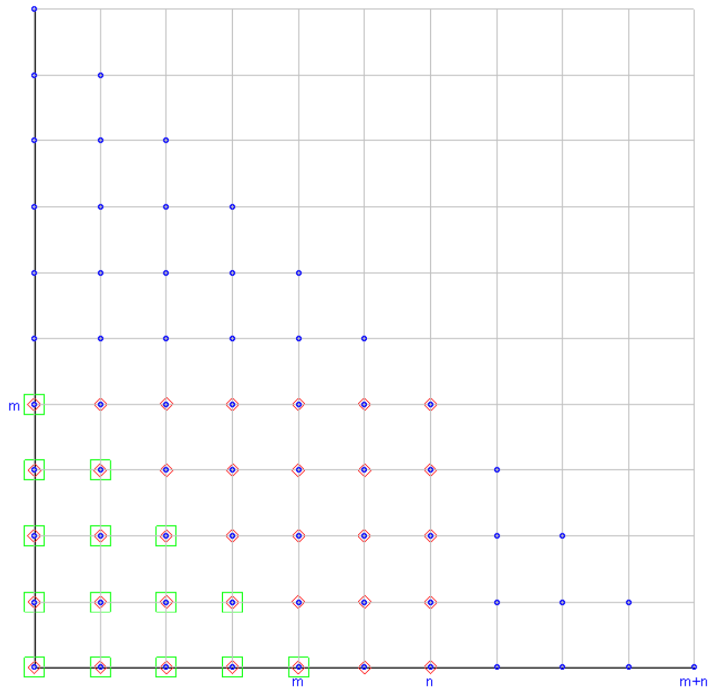
De plus $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)\leqslant\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)=S$. On note désormais $S'=\sum\limits_{j=0}^{m}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$. Il reste à montrer $S\leqslant S'$.

d/ Pour k et m naturels, on note $c_k = \sum_{i+j=k} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i}$

et $T_m = \sum_{k=0}^{m} c_k$ (termes en vert sur la figure)

Tous les termes étant positifs, la suite (T_m) est croissante et , $T_m \leqslant S_{n,m} \leqslant T_{m+n}$

($S_{n,m}$: termes en rouge, T_{m+n} : termes en bleu)



- $T_m \leqslant S_{n,m} = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) \leqslant \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$

  donc T_m a une limite quand $m \to \infty$ (notée T) et

  $\lim\limits_{m\to\infty} T_m \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ soit $T \leqslant S'$

- $S_{n,m} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\right) \leqslant T_{m+n}$

  donc ($m \to \infty$) $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} T_k = T$

  et enfin ($n \to \infty$) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right) \leqslant T$, soit $S \leqslant T$.

- On a donc démontré $S = S'$, et au passage $S = T$

Remarque : Si $(u_{i,j})_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}}$ une suite double de complexes, on peut appliquer le résultat précédent à la suite définie par $a_{i,j} = |u_{i,j}|$: On obtient un résultat sur la convergence absolue.

On peut également montrer que, si les hypothèses sont vérifiées, on a aussi $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}\right)$,

ce qui donne l'énoncé plus général du théorème de Fubini pour les séries :

On suppose	Alors
(1) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ / $u_{i,j} \in \mathbb{C}$ (2) $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} u_{i,j}$ converge absolument (3) la série $\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lvert u_{i,j}\rvert\right)$ converge	(i) $\forall j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i,j}$ converge absolument (ii) la série $\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}\right)$ converge absolument (iii) $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} u_{i,j}\right)$

Guido Fubini (1879 - 1943)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Guido_Fubini